非線形格子振動子系の ergodicity の計算機実験（2次元格子）

早大理工　斎藤信彦，広岡　一

非線形振動子系においては，わずかでも非線形性があれば統計的性質が存在し，エルゴード性が保証されることが期待されていた。しかし Fermi, Pasta, Ulam[1] による一次元非線形格子振動子系に対する種々の計算機実験はこの期待に反して基準振動の間のエネルギーの Mixing はあまりおこらず quasi－periodic な性質の存在することを示し，この意味で非線形性があっても non－ergodic な挙動の保たれることを示した。この様な結果はまた，充分に小さな，しかし finite な摂動をもった力学系では quasi－periodic な性質が保存されるという Kolmogorov[2] や Arnold[3] の主張にも一致する。

しかし，一次元系でも剛体斥力をもった調和振動子系では全てのモード間のエネルギーの等分配が見出され，ergodic な挙動を示すことを North-cote と Potts[4] は計算機実験で行なった。剛体的な斥力のあることは非線形性としては大きなものであり，一次元系ではこのような強い非線形性が必要であることにしても，2次元または3次元の，もっと現実に近い系では弱い非線形性でもエネルギーの交換が行なわれると考えられる。

2次元の格子振動として図1のような N×N 個の粒子からなる正方格子を考える。粒子の番号を x 軸方向に ℓ，y 軸方向に m とし，（ℓ，m）粒子の x 方向の変位を $x_{\ell,m}$ とする。x 方向の変位と y 方向の変位とは互いに無関係であると仮定する。

運動方程式は

$$m\ddot{x}_{\ell,m}=\kappa(x_{\ell+1,m}-2x_{\ell,m}+x_{\ell-1,m})+\kappa\lambda\{f(x_{\ell+1,m}-x_{\ell,m})$$
$$-f(x_{\ell,m}-x_{\ell-1,m})\}+\gamma(x_{\ell,m+1}-2x_{\ell,m}+x_{\ell,m-1})+\gamma\lambda$$
$$\times\{f(x_{\ell,m+1}-x_{\ell,m})-f(x_{\ell,m}-x_{\ell-1,m})\} \qquad (1)$$

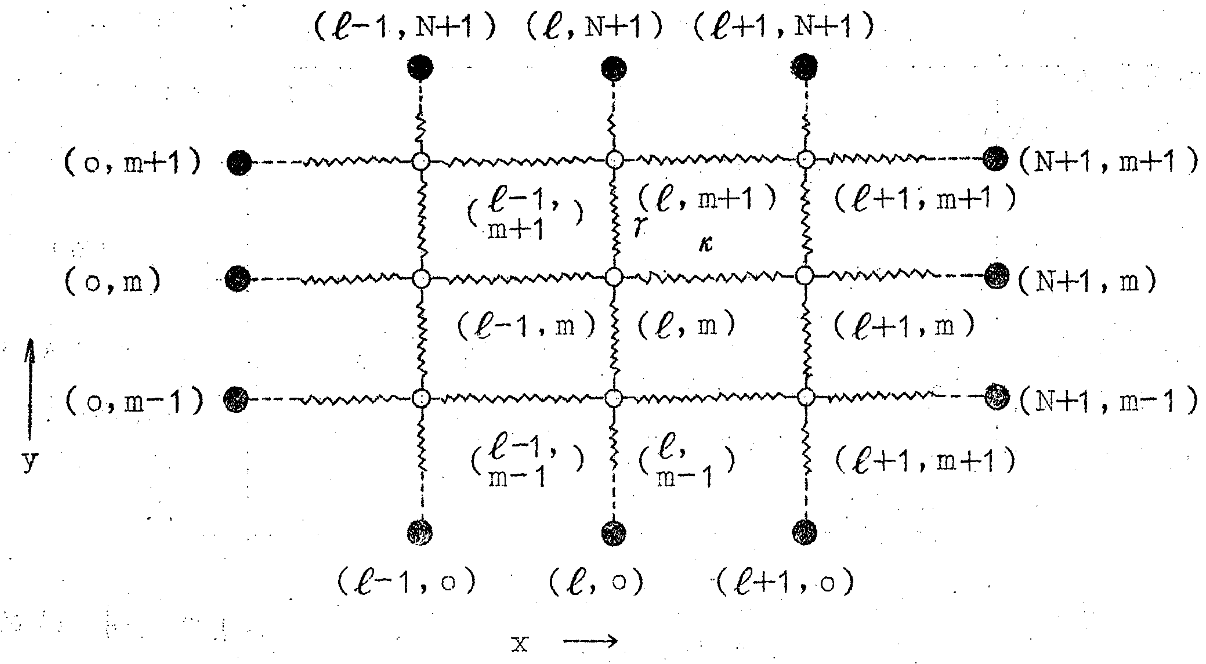


図１　　２次元正方格子

で表わされる。ここで κ ，$\kappa\lambda$ はそれぞれ中心力の線形および非線形の大きさをしめすパラメータであり，γ ，$\gamma\lambda$ は非中心力のパラメータである。境界条件として，一番外側の粒子は固定されているとする。

$$x_{o,m} = x_{N+1,m} = 0, \qquad m = 1, \cdots, N$$

$$x_{\ell,o} = x_{\ell,N+1} = 0, \qquad \ell = 1, \cdots, N \tag{2}$$

基準座標 a_{ij} を

$$x_{\ell,m} = \frac{2}{N+1} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \sin\frac{i\ell\pi}{N+1} \sin\frac{jm\pi}{N+1} \tag{3}$$

で定義すると，

$$\ddot{a}_{ij} = -\omega_{ij}^{2} a_{ij} + \lambda F(a) \tag{4}$$

ここで

$$\omega_{ij} = 2\left(\frac{\kappa}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sin^{2}\frac{i\pi}{2(N+1)} + \gamma \sin^{2}\frac{j\pi}{2(N+1)}} \tag{5}$$

が成り立つ。ここで F(a) は非線形の影響で一般に a_{ij}（i，j＝1，…，N）の関数である。このような２次元格子において t＝0 においてあるモードを励起した時に（i，j）番目の基準振動のエネルギー

$$E_{ij}=\frac{m}{2}\left(\dot{a}_{ij}^{2}+\omega_{ij}^{2}\,a_{ij}^{2}\right) \qquad (6)$$

の時間変化を調べる。ここで $f(x)\sim x^3$ のような４次のポテンシャルを用いる。N＝3の９個の自由度をもった正方格子についてのいくつかの結果を示す。ここで計算に用いたパラメータは

$$m=1,\quad \kappa=1,\quad \lambda=0.9,\quad \gamma=0.5$$

で，このときの各モードの調和振動子の場合の振動数 ω，および周期Tは表１のようになる。

図２は，はじめに最低の振動数をもった（1.1）番目のモードにある量のエネルギーを与えた場合を示している。他のモードにも，はじめに（1.1）のモードの $^1/_{100}$ 程度のエネルギーが与えてあるが，（1.1）のモードからのエネルギーの分配は，図の時間内では全くみられず非常に安定な挙動を示し，この場合には１次元に比べて他のモードへのエネルギーの分配は困難なように思われる。しかしながら２次元の場合には粒子数が少くても振動数が非常に接近しているいくつかのモードを作ることができる。例えば表１では，（1，3），（2，2），（3，1）番目のモードは $\omega\sim 1.9$ である。このような $\omega_{\ell,m}\approx\omega_{\ell',m'}$ の場合を調べることは Ford ら[5]による共鳴条件からみても興味がある。この意味で，図３は，はじめに表１中の（2，2）番目のモードにエネルギーを与えた場合が示してある。この実験では，$\tau_{11}\sim 2\pi/\omega_{11}$ の20周期あたりで（2，2）のモードと（1，3），（3，1）のモードとの間に急

表１　モードの振動数および周期

モードNo.	ω	T
1，1	1.06	5.96
1，2	1.54	4.07
1，3	1.91	3.29
2，1	1.59	3.95
2，2	1.95	3.22
2，3	2.25	2.79
3，1	1.99	3.17
3，2	2.28	2.75
3，3	2.55	2.47

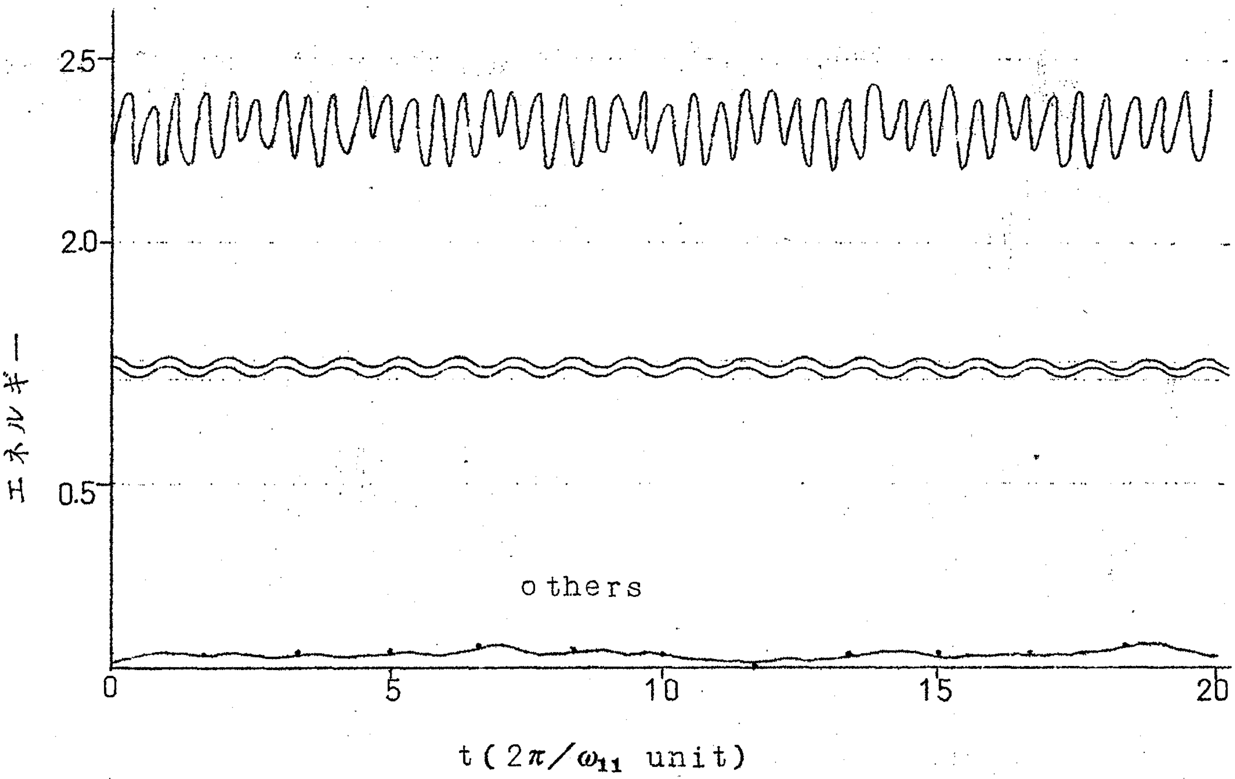


図２　（１，１）モードを励起したとき

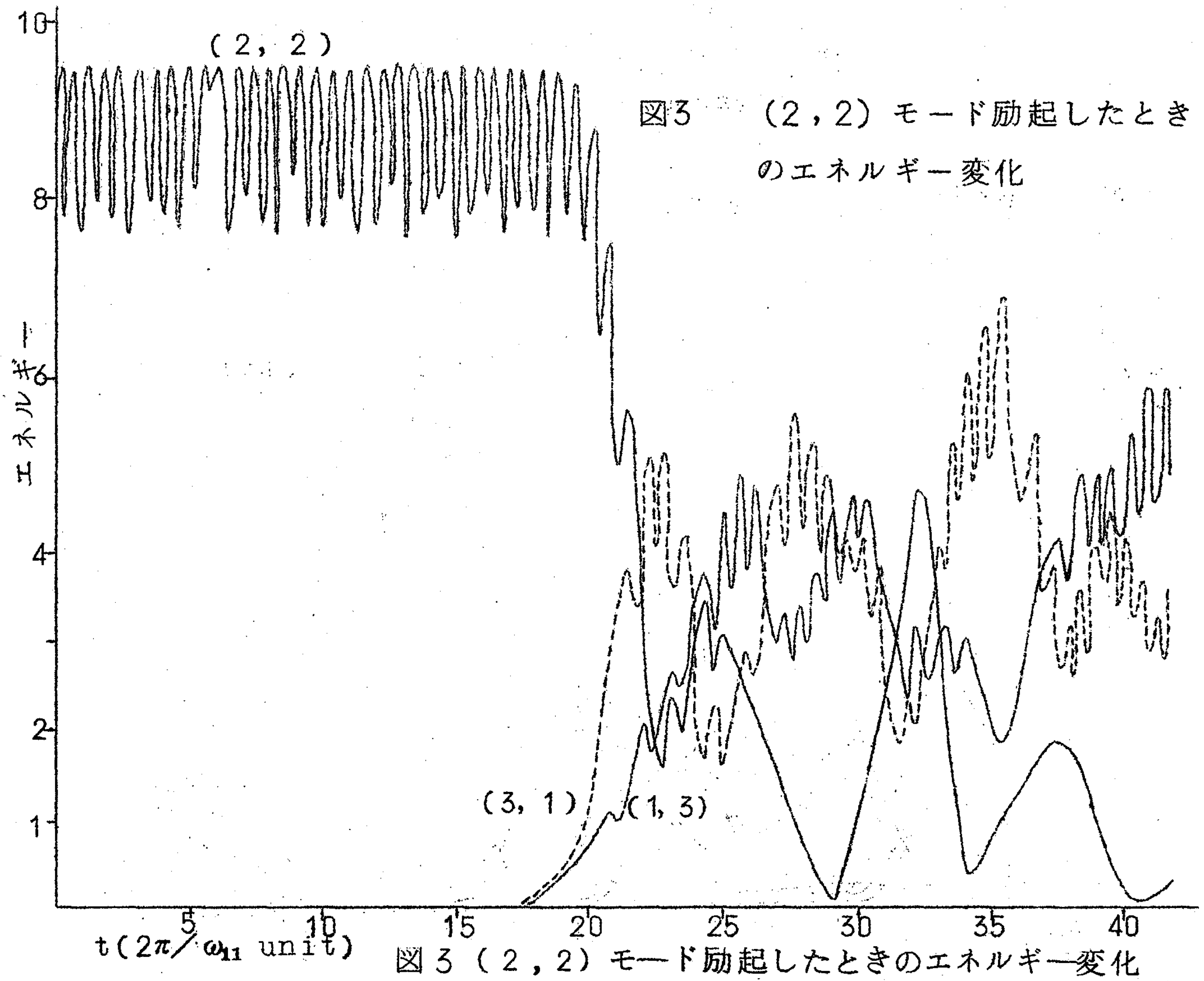


図３（２，２）モード励起したときのエネルギー変化

図4　(2，2) モード励起，他のモード $\frac{1}{1000}$ 程度含む

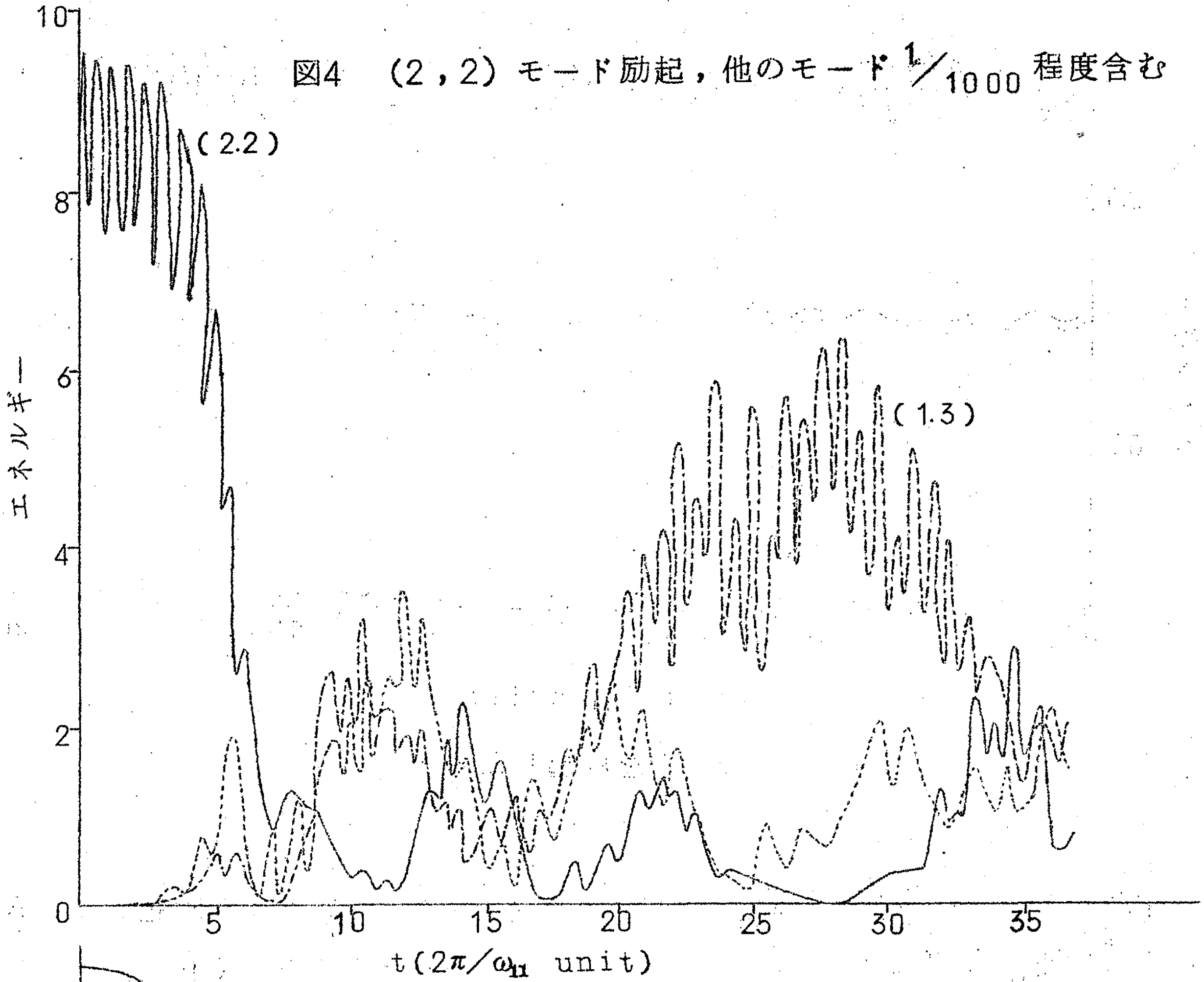
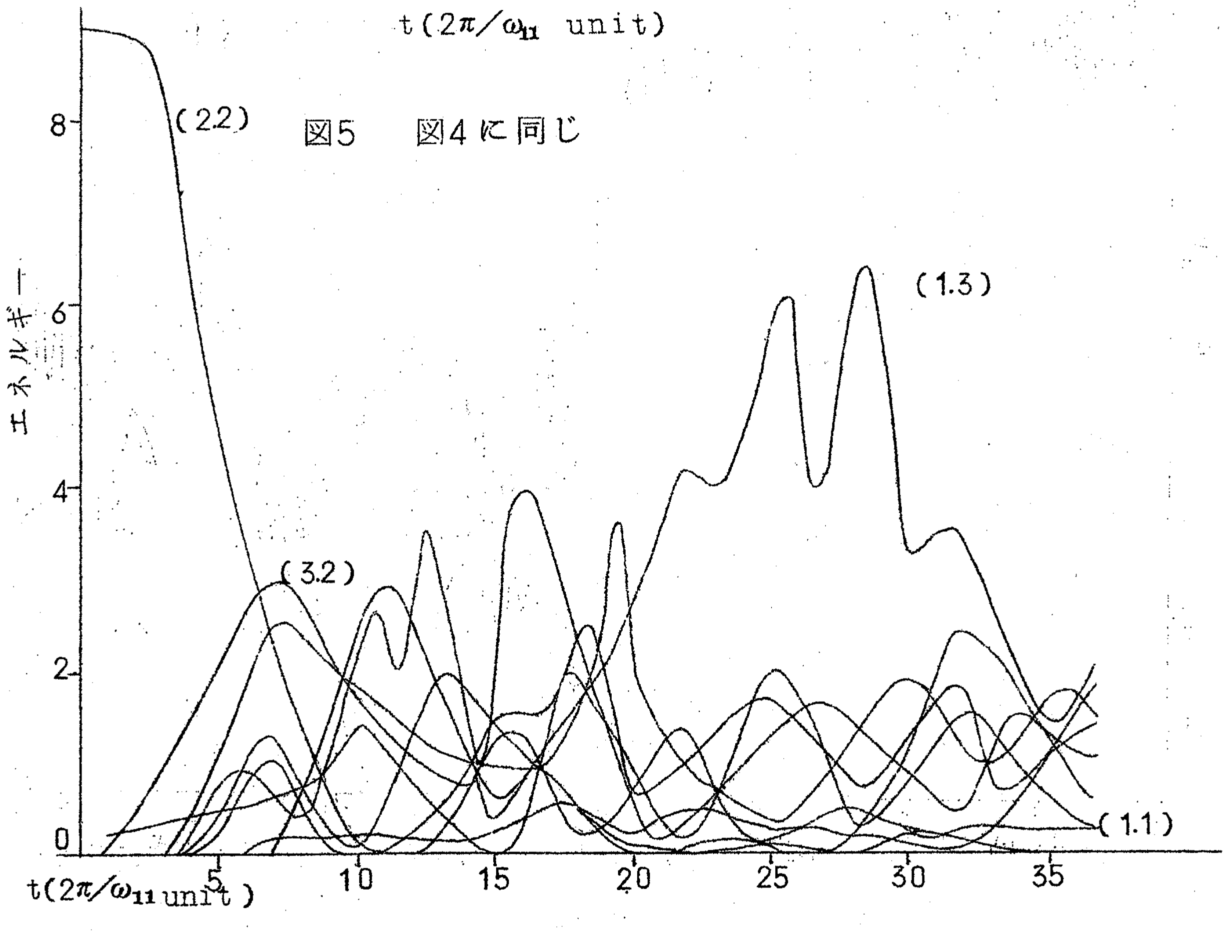


図5　図4に同じ



激にエネルギーの交換が行われていることがみとめられる。しかしこの図においては，他のモードへのエネルギーの交換はまだ起っていない。このためにはより長い時間が必要である。

このようすをみるには，図４に示されるように，はじめから他のモードへも $^{1}/_{1000}$ 程度のエネルギーを与えておくと，エネルギーの交換はより早く行なわれ，約５周期のところで，（２，２）のモードのエネルギーは他のモードへ移っていくことができる。図４には代表的ないくつかのモードのみを画いてあり，他のモードのエネルギーの時間変化の大体の様子が図５に表わされる。この時間内では（１，１）のモードにはまだあまりエネルギーが分配されていることがわかる。（１，１）のモードに十分なエネルギーを与えるためには，もっと時間が必要である。こうして，全てのモードにエネルギーが分配され熱平衡への接近が行われると考えられる。同様な結果はまた，Ｎ＝７の正方格子に対してもえられる。Ｎ＝３の場合と同様に（１，１）のモードにエネルギーを与える時にはエネルギーの分配は非常に困難であるが，より高いモードに与える場合にはエネルギーの急激な分配がみられる。

このように２次元の場合には，はじめに最も低い振動数のモードを励起する場合はエネルギーの交換は困難であるが，高いモードを励起すれば，ある induction period の後に急激なエネルギー交換がおこり，かなり等分配する傾向がみられる。そしてまた，はじめに少しのエネルギーを他のモードに与えておくことが交換を容易にすることがわかる。

このように２次元の場合には，Fermi らによる１次元の場合よりもより容易に ergodic な性質のあらわれる条件を見出すことが出来るが，これらの結果は２次元特有であるとは断定できない。Israilijev，Chirikov[6] や Zaslavsky，Sagdeev[7] によれば，非線形項の大きさや，初期条件によって２つの領域があることが示される。その一つは stochastic な領域であり，他は non－ergodic な領域（あるいは Kolmogorov 領域と云われる）である。このことは上で述べた２次元の場合における計算機実験にも示されている。このように，上で述べた挙動は２次元に限られたことではなく，１次元の場合についての ergodicity の条件に対してもまだ検討する必要があると思われる。そして，粒子数が大きい時や３次元の場合に対してはより

容易にエルゴード性の条件が保証されているのであろう。更に，モード間のエネルギーの交換が行なわれることは熱平衡のための必要条件であるが十分条件ではなく，このためには各粒子の運動エネルギーの長時間的平均や粒子の速度の相関に関しても検討しなければならない。

文　　献

1) E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam ; Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-1940 (1955)

2) A. N. Kolmogorov ; DAN 98, 527 (1954)

3) V. I. Arnold ; VMN, KHUSH 91, (1963)

4) R. S. Northcote, R. B. Potts ; J. Math. Phys. 5, 383 (1964)

5) J. Ford ; J. Math. Phys. 2, 387 (1961)
J. Ford and J. Waters ; ibid 4, 1293 (1963)

6) F. M. Israilijev and B. V. Chirikov ; Soviet Physics Doklady 11, 30 (1966)

7) G. M. Zaslavsky and R. Z. Sagdeev ; Soviet Physics JETP 25, 718 (1967)